L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 3 pages. L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$.

1. (a) Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de cet ensemble.
   (c) h possède-t-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$?
2. (a) Montrer que $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \ 0 < \sqrt{x^2+y^2} < 2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (b) h a-t-elle des points critiques dans $\mathcal{U}$?
   (c) Montrer que h est bornée sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \ x^2+y^2 \leqslant 4\}$ et qu'elle y atteint ses bornes, puis déterminer les points de D en lesquels ces bornes sont atteintes.

PROBLÈME

1ère Partie : Calcul d'une intégrale et étude d'une fonction

A. Calcul de l'intégrale de Gauss

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente ; sa valeur sera notée τ.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$ est convergente. On pose alors
$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt, \ x \geqslant 0.$$
3. Calculer $\psi(0)$ et justifier que ψ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
4. (a) Montrer que ψ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer de même que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$; pour cela on montrera que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout réel $a > 0$.
   (c) Vérifier que ψ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\tau}{\sqrt{x}}$.
5. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leqslant \psi(x) \leqslant \frac{\tau}{\sqrt{x}}$ et en déduire la limite de ψ en $+\infty$.
   (b) Préciser la limite de la fonction ψ' en 0^+ et dessiner l'allure du graphe de la fonction ψ.

6. On pose $\lambda(x) = e^{-x}\psi(x)$, $x \geqslant 0$.

   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$ converge.

   (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\lambda(x) = c - \tau \displaystyle\int_0^{x} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$ où c est une constante à déterminer, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$ en fonction de τ.

   (c) Montrer par un changement de variable que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et en déduire que $\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

B. Étude d'une fonction

On note F et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{-t^2} dt$.

1. (a) Exprimer F à l'aide de f.

   (b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. En comparant x et x^2 pour tout $x \in \mathbb{R}$, préciser le signe de F sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Que vaut $F(0)$? Et $F(1)$?

3. (a) Montrer que $F(x)$ tend vers $\sqrt{\pi}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

   (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant F(x) \leqslant e^{-x} - e^{-x^2}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

4. On pose $g(x) = 2xe^{x^2-x^4} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculer la dérivée de g et montrer que $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = \pm\alpha$ avec $\alpha = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}$.

   (b) Étudier les variations de g ; on fera un tableau de variations en précisant les limites en $\pm\infty$. Justifier qu'il existe $a \in]0, \alpha[$ et $b > 1$ tels que $g(a) = g(b) = 0$.

5. (a) Étudier les variations de F ; on fera un tableau de variations et on précisera les signes de $F(a)$ et $F(b)$.

   (b) Dessiner l'allure de la courbe représentative de F (unité 2 cm) ; on précisera les pentes des tangentes aux points d'abscisses 0, 1, a et b ainsi que les asymptotes à la courbe. On prendra $a \simeq 0.43$, $b \simeq 1.26$, $F(a) \simeq -0.25$, $F(b) \simeq 0.05$.

2$^{\text{ème}}$ Partie : Un résultat d'approximation

A. Quelques résultats préliminaires

1. (a) Justifier que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0, n]$, $e^{-u} - (1 - \frac{u}{n})^n \geqslant 0$.

2. (a) Justifier que pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0, 1]$, $(1-t)^n e^{nt} \geqslant (1-t^2)^n$.

   (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0, 1]$, $(1-t^2)^n \geqslant 1 - nt^2$.

   (d) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0, n]$, $e^{-u} - (1 - \frac{u}{n})^n \leqslant \frac{u^2}{n} e^{-u}$.

B. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n et tout réel α, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt\ ;\ \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{si} \quad n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 et justifier que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) À l'aide d'une intégration par partie montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
   (c) En déduire que la suite $\left(nI_nI_{n-1}\right)_{n\geqslant 1}$ est constante de valeur $\pi/2$.
2. (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   (b) Déduire de ce qui précède l'encadrement $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, valable pour $n \geqslant 1$.
3. (a) En utilisant la question 1.(b) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.
   (b) Dans la suite on pose $\lambda_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 \leqslant 1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} \leqslant \dfrac{1}{4n}$, puis en déduire un équivalent de λ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

C. Étude d'une suites de polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad P_n = \lambda_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-1}X^{2k}$.

1. (a) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$ alors l'intégrable $\displaystyle\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ est convergente.
   (b) Montrer que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,1]$, $P_n(x) = \lambda_n x \displaystyle\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,dt$.
   (c) En déduire que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,1]$, $P_n(x) = \lambda_n\sqrt{n} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}\,du$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$ est convergente et à l'aide d'une intégration par partie, justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\,du = |x|\sqrt{\pi}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Soient n un entier $\geqslant 1$ et $x \in]0,1]$; on pose

$$\Delta_n(x) = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}\,du \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\,du.$$

   (a) Vérifier que $P_n(x) - x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\lambda_n\sqrt{n\pi}\Delta_n(x) - \Delta(x)\Big)$ et montrer que

$$\big|P_n(x) - x\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big((\frac{1}{4n}+1)|\Delta_n(x) - \Delta(x)| + \frac{1}{4n}\Delta(x)\Big).$$

   (b) Montrer que

$$\big|\Delta_n(x) - \Delta(x)\big| \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2x^2} - (1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}\,du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\,du \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   (c) Montrer alors que $\displaystyle\sup_{-1\leqslant t\leqslant 1} \Big|P_n(t) - |t|\Big| \leqslant \Big(\frac{1}{4n}+1\Big)\Big(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\Big) + \frac{1}{4n}$.

FIN DE L'ÉPREUVE